8 de Junio - 2017 *Tiempo: 2 horas*

Nombre y Apellidos:

Nº de Matrícula:

Pr 1	*Pr 2*	*Pr3*	*Pr4*	*Nota*

EXAMEN TEMA 2:Funciones de varias variables

1. *(2,5 ptos.)*Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3 - y^3 + yx^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, se pide

a) *(0,8 ptos.)*Estudiar la continuidad de la misma.

b) *(0,8 ptos.)*Calcular sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y},$ incluyendo el cálculo de las mismas en (0,0). Y (1,0).

c) *(0,4 ptos.)*Calcular el plano tangente a la misma en (1,0).

d) *(0,5 ptos.)* Calcular su derivada direccional en el punto (1,0) según la dirección del vector (1,1)

¡OJO! CUALQUIER APARATO ELECTRÓNICO QUE SE PRETENDA USAR ESTÁ PROHIBIDO Y SERÁ REQUISADO Y CONSIDERADO COMO UNA DONACIÓN AL MUSEO DE LA INFORMÁTICA.

8 de Junio - 2017 *Tiempo: 2 horas*

Nombre y Apellidos:

Nº de Matrícula:

Pr 1	*Pr 2*	*Pr3*	*Pr4*	*Nota*

2. *(2,5 ptos.)* Dada la función $f(x,y) = \frac{(2x-1)x+y(y+1)}{y-x}$, cuando $(x,y) \to (0,0)$, se pide

a) *(0,5 ptos.)*calcular sus límites reiterados

b) *(0,5 ptos.)* calcular sus límites según rectas $x = my$

c) *(1 ptos.)* calcular sus límites según las curvas $x = ay^2$, $x = y + y^2$

d) *(0,5 ptos.)* De acuerdo con los cálculos anteriores deducir si dicha función tiene o no límite en el origen

¡OJO! CUALQUIER APARATO ELECTRÓNICO QUE SE PRETENDA USAR ESTÁ PROHIBIDO Y SERÁ REQUISADO Y CONSIDERADO COMO UNA DONACIÓN AL MUSEO DE LA INFORMÁTICA.

8 de Junio - 2017 *Tiempo: 2 horas*

Nombre y Apellidos:

Nº de Matrícula:

Pr 1	*Pr 2*	*Pr3*	*Pr4*	*Nota*

3. *(2,5 ptos.)* a) *(1,5 ptos.)* Calcular los extremos relativos de la función

$$f(x,y) = -x^2 - y^2 + x^2y^2 + 4$$

b) *(1 ptos.)* Calcular los extremos de la misma bajo la restricción $x^2 + y^2 = 1$.

¡OJO! CUALQUIER APARATO ELECTRÓNICO QUE SE PRETENDA USAR ESTÁ PROHIBIDO Y SERÁ REQUISADO Y CONSIDERADO COMO UNA DONACIÓN AL MUSEO DE LA INFORMÁTICA.

8 de Junio - 2017 *Tiempo: 2 horas*

Nombre y Apellidos:

Nº de Matrícula:

Pr 1	*Pr 2*	*Pr3*	*Pr4*	*Nota*

4. *(2,5 ptos.)* Calcular la integral

$$\iint_R \sqrt{xy}\, dx\, dy$$

$a)$ *(1 ptos.)* Siendo R=$[0,1] \times [0,1]$

$b)$ *(1,5 ptos.)* Siendo R el recinto del primer cuadrante limitado por las curvas de ecuación $y = x^3$ e $y = x^2$

¡OJO! CUALQUIER APARATO ELECTRÓNICO QUE SE PRETENDA USAR ESTÁ PROHIBIDO Y SERÁ REQUISADO Y CONSIDERADO COMO UNA DONACIÓN AL MUSEO DE LA INFORMÁTICA.

8-junio-2017 **Cálculo** Grupo 1M-B 5-3-2 2h.

1.- Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 + yx^2 - y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Se pide:

i) Estudiar la continuidad de la función en $\mathbb{R}^2$

ii) Calcular las derivadas parciales f'_x y f'_y en los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$, si es que existen.

iii) Justificar la existencia o no del plano tangente en cada uno de los dos puntos mencionados. Calculándolo donde exista. Justificar la respuesta.

iv) Determinar la derivada de $f(x,y)$ según el vector $\overline{v} = [0,1]$ en el punto $(1,0)$, ¿coincide con el valor de la derivada direccional en la dirección de dicho vector?

v) Obtener el valor y la dirección en que es máxima la derivada direccional de $f(x,y)$ en el punto $(1,0)$

Solución

i) Se trata de una función que es un cociente de polinomios. Luego es continua salvo en los puntos donde se anula el denominador, es decir cuando $x^2+y^2 = 0$, o lo que es lo mismo, si $(x,y) = (0,0)$. Verifiquemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

Pasemos a polares, $x = \rho\cos(\theta)$, e $y = \rho\,\text{sen}(\theta)$, quedará

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3+yx^2-y^3}{x^2+y^2} &= \lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho^3\cos^3(\theta) + \rho\,\text{sen}(\theta)\rho^2\cos^2(\theta) - \rho^3\,\text{sen}^3(\theta)}{\rho^2(\cos^2(\theta)+\text{sen}^2(\theta))} \\ &= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\left[\cos^3(\theta) + \text{sen}(\theta)\cos^2(\theta) - \text{sen}^3(\theta)\right]}{\rho^2} \\ &= \lim_{\rho\to 0} \rho\,[\text{acotado}] = 0. \end{aligned}$$

Por tanto la función $f(x,y)$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

ii) Calculemos las derivadas parciales aplicando la definición,

$$f'_x(a,b) = \lim_{x\to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}, \quad f'_y(a,b) = \lim_{y\to b} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b},$$

nótese que se cumple que

$$f(0,0)=0, \quad f(1,0)=2.$$

Apliquemos la definición a los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$, resultará

$$\begin{aligned}
f'_x(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x^3+0-0}{x^2+0}-0}{x-0} = 2,\\
f'_y(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{0+0-y^3}{0+y^2}-0}{y-0} = -1,\\
f'_x(1,0) &= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2x^3+0-0}{x^2+0}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x^3-2x^2}{x^2(x-1)} = 2,\\
f'_y(1,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{2+y-y^3}{1+y^2}-2}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{2+y-y^3-2y^2-2}{y(1+y^2)} = \lim_{y\to 0} \frac{1-y^2-2y}{1+y^2} = 1.
\end{aligned}$$

Las dos últimas derivadas podrían haberse calculado mediante $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f'_x(x,y)$ y también $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f'_y(x,y)$. Habríamos obtenido los mismos resultados, es decir $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f'_x(x,y) = 2$, y $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f'_y(x,y) = 1$, ya que $f'_x(x,y)$ y $f'_y(x,y)$ son funciones continuas en un entorno del punto $(1,0)$.

iii) Analicemos si existe o no plano tangente en ambos puntos. En el caso del punto $(0,0)$ no nos queda más remedio que verificar si el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-[f'_x(0,0), f'_{0,0}] \begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \end{bmatrix}}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = 0,$$

o no. En este caso

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{2x^3+yx^2-y^3}{x^2+y^2} - 0 - [2,-1]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3+yx^2-y^3+(x^2+y^2)(-2x+y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3+xy^2-y^3-2x^3+yx^2-2xy^2+y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx^2-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

pasando a polares $x=\rho\cos(\theta)$, e $y=\rho\operatorname{sen}(\theta)$, y queda

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3(\operatorname{sen}(\theta)\cos^2(\theta)-\cos(\theta)\operatorname{sen}^2(\theta))}{\rho^3} = h(\theta) \neq 0.$$

Por tanto no es diferenciable en $(0,0)$, lo que equivale a la no existencia del plano tangente en $(0,0)$.

En el caso del punto $(1,0)$, hemos señalado que las funciones $f'_x(x,y)$ y $f'_y(x,y)$, son funciones continuas en un entorno del punto $(1,0)$, que obviamente no es un punto donde se anule el denominador de $f(x,y)$, ni tampoco los denominadores de sus derivadas parciales. Por tanto $f(x,y)$ es diferenciable en $(1,0)$. El plano tangente en dicho punto será

$$z - f(a,b) = (x-a)f'_x(a,b) + (y-b)f'_y(a,b),$$

es decir

$$z - 2 = (x-1)\cdot 2 + (y-0)\cdot 1 \;\Rightarrow\; z = 2x + y.$$

iv) La derivada según un vector en un punto donde la función es diferenciable, lo que obviamente ocurre en el $(1,0)$, viene dada por

$$f'_{\overline{v}}(1,0) = \langle \mathrm{grad} f(1,0), \overline{v}\rangle.$$

Por tanto si $\overline{v} = [1,0]$, será

$$f'_{\overline{v}}(1,0) = \langle [2,1],[1,0]\rangle = 2.$$

Es claro que el vector $\overline{v} = [1,0]$ es unitario, por tanto la derivada según dicho vector coincide con la derivada direccional.

v) Sabemos que la derivada direccional es máxima en la dirección del vector gradiente. Luego será en la dirección

$$\overline{w} = \frac{[2,1]}{\|[2,1]\|} = \frac{[2,1]}{\sqrt{2^2+1}} = [\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}].$$

Por otro lado la derivada direccional en la dirección de $\overline{w}$ –la dirección del gradiente– valdrá

$$f'_w(1,0) = \langle [2,1], [\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}]\rangle = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Nótese que como cabía esperar $\sqrt{5} > 2$.

2.- Dada la función $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 4$. Se pide:

i) Analizar su puntos estacionarios.

ii) Determinar los máximos y mínimos absolutos en la región

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

iii) Calcular los máximos y mínimos absolutos en la región

$$\Gamma = [0,2] \times [0,2].$$

Solución

i) Las derivadas parciales serán

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 - 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 2y.$$

Igualando a cero las derivadas parciales, resulta

$$2x(y^2-1) = 0, \quad 2y(x^2-1) = 0,$$

la primera ecuación nos dá $x = 0$, $y = \pm 1$; y la segunda $y = 0$ e $x = \pm 1$, las parejas que anulan simultaneamente ambas ecuaciones son

$$(0,0),\ (1,1),\ (1,-1),\ (-1,1),\ (-1,-1).$$

Veamos el Hessiano para ver a qué corresponden. Tenemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2 - 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4yx, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 2,$$

luego

$$H(f,(x,y)) = \begin{pmatrix} 2y^2-2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2-2 \end{pmatrix}.$$

Particularizando en los puntos resultará:

(0,0): queda $H(f,(0,0)) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, luego $\Delta_1 = -2$ y $\Delta_2 = 4$, luego definida negativa, luego máximo relativo en $(0,0)$.

(1,1): queda $H(f,(1,1)) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, luego $\Delta_1 = 0$ y $\Delta_2 = -16 < 0$, luego punto silla en $(1,1)$.

(1,-1): queda $H(f,(1,-1)) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, luego $\Delta_1 = 0$ y $\Delta_2 = -16 < 0$, luego punto silla en $(1,-1)$.

(-1,1): queda $H(f,(-1,1)) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, luego $\Delta_1 = 0$ y $\Delta_2 = -16 < 0$, luego punto silla en $(-1,1)$.

(-1,-1): queda $H(f,(-1,-1)) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, luego $\Delta_1 = 0$ y $\Delta_2 = -16 < 0$, luego punto silla en $(-1,-1)$.

ii) Estudiemos lo que ocurre en la región $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Observamos que se trata de un círculo de radio 1. Sabemos que la región es un conjunto compacto y en Ω, además, la función es obviamente continua ya que es un polinomio en *x*-*y*, existirán –por el teorema de Weierstrass– puntos en Ω donde la función alcance su máximo y mínimo absoluto.

Obviamente el único candidato en el interior es el punto $(0,0)$. Estudiemos lo que ocurre en la frontera. La ecuación de la frontera es $x^2 + y^2 = 1$. Podemos

de donde $h'(x) = 6x$, tenemos en $x = 0$ un mínimo, ya que $h'' = 6 > 0$. La frontera de esta recta son los puntos $(0,2)$ y $(2,2)$. Tenemos los valores $f(0,2) = 0$. No es ninguna sorpresa por la simetría existente. En el otro punto frontera, el $(2,2)$, tenemos $f(2,2) = 4\cdot 4 - 4 - 4 + 4 = 12$.
Nótese que la simetría permite hacer $x \rightleftarrows y$, y afirmar que para las dos rectas restantes arriba señaladas y obtendríamos análogos resultados, solo que permutando ahora la x por la y.
Resumiendo, el candidato a máximo absoluto se produce en $(2,2)$ y vale $f(2,2) = 12$, mientras que el mínimo absoluto se producirá en $(2,0)$ y $(0,2)$ y valdrá $f(0,2) = f(2,0) = 0$.

3.- Calcular $\iint_\Omega \sqrt{xy}\ dx\,dy$.

i) Siendo $\Omega = [0,1]\times[0,1]$.

ii) Determinar dicha integral cuando Ω es la región acotada del plano limitada por las parábolas $y = x^3$, e $y = x^2$.

Solución

i) Tendremos que como $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$

$$\iint_\Omega \sqrt{xy}\,dx\,dy \;=\; \int_0^1 \sqrt{x}dx \int_0^1 \sqrt{y}dy = \int_0^1 \left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

ii) En el segundo caso, calculemos la región Ω. Los puntos de corte de las dos parábolas vienen dados por $x^3 = x^2$, nos da las soluciones $x = 0$ y $x = 1$, luego

$$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,1]\wedge y\in[x^3,x^2]\}.$$

Por tanto la integral pedida es, ya que si $x\in[0,1]$, $x^3 \leq x^2$

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega \sqrt{xy}\,dx\,dy &= \int_0^1 \sqrt{x}dx \int_{x^3}^{x^2} \sqrt{y}dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_{x^3}^{x^2} \sqrt{x}\,dx \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 \left[(x^2)^{3/2} - (x^3)^{3/2}\right] x^{1/2}dx \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 \left[x^{7/2} - x^5\right] dx = \frac{2}{3}\left[\frac{x^{9/2}}{9/2} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}\left[\frac{2}{9} - \frac{1}{6}\right] = \frac{2}{54} = \frac{1}{27}.
\end{aligned}$$

1. *(2,5 ptos.)* Dada la función $f(x,y)=\frac{(2x-1)x+y(y+1)}{y-x}$, cuando $(x,y)\to(0,0)$, se pide

a) *(0,5 ptos.)*calcular sus límites reiterados

b) *(0,5 ptos.)* calcular sus límites según rectas $x=my$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}$

c) *(1 ptos.)* calcular sus límites según las curvas $x=ay^2$, $x=y+y^2$

d) *(0,5 ptos.)* De acuerdo con los cálculos anteriores deducir si dicha función tiene o no límite en el origen

a) $\lim_{y\to0}(\lim_{x\to0}f(x,y))=\lim_{y\to0}(y+1)=1$ $\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}f(x,y)\right)=\lim_{x\to0}-(2x-1)=1$

b) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=my}}\frac{(2x-1)x+y(y+1)}{y-x}=\lim_{y\to0}\frac{(2my-1)my+y(y+1)}{y-my}=1$

c) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=ay^2}}\frac{(2x-1)x+y(y+1)}{y-x}=\lim\limits_{y\to0}\frac{\left(2ay^2-1\right)ay^2+y(y+1)}{y-ay^2}=1,$

$$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=\left(y+y^2\right)}}\frac{(2x-1)x+y(y+1)}{y-x}=\lim\limits_{y\to0}\frac{\left(2\left(y+y^2\right)-1\right)\left(y+y^2\right)+y(y+1)}{y-\left(y+y^2\right)}=0$$

d) Concluimos que no existe el límite ya que al acercanos al punto pordistintas curvas obtenemos distintos valores